連続な超選択則について

京大数理研　　荒　木　不二洋

§1. 序

量子力学の通常の定式化では，力学量をヒルベルト空間上の（自己共役な）線形作用素で表わし，（混合）状態を密度行列で表わす。特に純粋状態はベクトルζで表示され，密度行列で云えば，$\rho(\zeta)=|\zeta><\zeta|$ で表わされる。

量子力学における観測を記述する場合，観測される系と観測機械とは独立な系と考えて，全体の状態を両者に対応するヒルベルト空間のテンソル積の上で記述する。例えば，観測の初めにそれぞれが σ_1 および σ_2 で表わされる状態ならば，全体の系の状態は $\sigma_1\otimes\sigma_2$ という密度行列で表わされる。特にそれぞれが純粋状態 $\rho(\xi)$，$\rho(\eta)$ ならば，全体の系も $\rho(\xi\otimes\eta)$ という純粋状態である。

純粋状態から出発してある物理量（離散的固有値のものとする）を測定したときに得られる全系の状態は，正統的見解（orthodox view）によれば，$\zeta=\sum c_k(\xi_k\otimes\eta_k)$のようになる。$\eta_k$ は互に直交していて，例えば計数表示の数字の如くそれによって異る観測結果を識別できるものの筈である。観測される系の初めの状態を $\xi=\sum c'_k\,\xi'_k$ のように，今観測している物理量の異る固有値に属する固有関数 ξ'_k で展開したとき，$|c_k|=|c'_k|$となっていて（ただしベクトルは正規化されているとする），違う固有値の確率が測定される筈でもある。そして，（第１種の観測では）$\xi_k=\xi'_k$ になっていると考えている。

ところが，このような重ね合せの形では異るkの項の間の位相による干渉結果の可能性は残っていて，例えば猫の生死の場合にあてはめて考えると，常識とくいちがいがあるように思われる。そこで観測の結果はむしろ

$$\rho'=\sum|c_k|^2\rho(\xi_k)\otimes\rho(\eta_k) \tag{1}$$

のような密度行列で表わされる，という波束の収縮の考え方が登場する。

量子力学が普遍的な理論ならば，観測機械も含めた全系を量子力学的に取扱うことができてしかるべきである。量子力学的時間発展はユニタリ作用素$U_t=e^{iHt}$により$\zeta_t=U_t\zeta$あるいは$\rho_t=U_t\rho U_t^*$のように表わされる。この変換$\rho\to\rho_t$の線形性を主な論拠として，Wigner[1)] Fine[2)]等は量子力学的時間発展により，波束の収縮(1)が生ずることは，数学的に不可能であることを示した。

これに対し，町田・並木[3)]はこれが可能になる枠組を最近提案している。この町田・並木理論の抽象版として，連続な超選択則を以下に解説する。

§2. 連続な超選択則

離散的な超選択則については，運動群の1価表現と2価表現の間に必要であることを含めてWick・Wigner・Wightman[4)]により云い出された。その場合，力学量は超選択則と可換なものに限定され，また純粋状態としては超選択則の固有状態だけで十分であり，超選択則の異る固有値に属するベクトルの重ね合わせを考えても，力学量の期待値を考える上で，超選択則の固有状態の混合と全く変らない(したがって純粋状態ではない)ので，通常これを物理的状態に対応するベクトルとは考えない。(4)の議論は状態を第一義的に取り上げているため，違った云い方になっているが，結果的には同じである。)

上記において超選択則を絶対連続なスペクトルをもつものにとったものは，以下のように記述できる。

ヒルベルト空間	$\mathscr{H} = \int^{\oplus} \mathscr{H}(x)\, dx$
ベクトル	$\Psi = \int^{\oplus} \Psi(x)\, dx$
内積	$(\Psi, \Phi) = \int (\Psi(x), \Phi(x))\, dx$
力学量	$A = \int A(x)\, dx$
	$A\Psi = \int A(x)\,\Psi(x)\, dx$
超選択則	$S = \int s(x)\, \mathbf{1}_x\, dx$

この中で，ベクトルの形は任意のベクトルがこのように書けると云うのに対し，力学量の表式は，力学量をこのように制限するという意味である。xは超選択則の固有値に相当し，数学的にはその変域を(ルベック測度が0でない)どのような(実数の可測)集合にとっても同等(ユニタリ同値)である。超選択則として，あらゆる(可測有界な)函数$s(x)$を許すとすれば，超選択則と可換な作用素はちょうど力学量の表式で表わされるものになる。このような力学量の期待値

$$(\Psi, A\Psi) = \int (\Psi(x), A(x)\,\Psi(x))\, dx \tag{2}$$

に関する限り，$\Psi(x)$の位相の違いは物理的に区別がつかない。その意味で，$\Psi(x)$の絶対値が同じΨは同じ状態を表わすものと考えてよい。

町田・並木理論の数学的背景は，観測機械の記述に超選択則のある上記の記述を使うことである。その場合U_tを適当に選べば，観測される系の初期状態

$$\rho = \rho(\xi) \otimes \sigma, \quad \xi = \sum c_k \xi_k \tag{3}$$

から

$$\lim_{t \to \infty} U_t \rho U_t^* = \sum |c_k|^2 \rho(\xi_k) \otimes \sigma_k \tag{4}$$

のように波束の収束を起すことができる。ただし σ_k はたがいに直交する（ $k \neq l$ なら $\sigma_k \sigma_l = \sigma_l \sigma_k = 0$）。（たとえば5）の(3.8)で σ の部分に(3.4)の分離の模型を使えばよい。）ここで極限を使っているが，この意味の波束の収束にも Wigner や Fine の議論は適用できて，超選択則を考えない量子力学では数学的に不可能である。

§ 3. 物理的意味づけ

常識的には，観測機械のような巨視的対象の位相は，巨視的に離れたものの干渉や，巨視的な数の粒子のコヘレンスなど，特別な装置をあらかじめ作っておかない限り，雑音的な外界の影響等の理由で，観測不可能になると予想される。そして，このような事情が多分波束の収縮とよびたい現象であろう。

それを数学的に定式化するひとつの方法は，部分的状態（partial state）の考え方であろう。すなわち，ある時点以後観測できる物理量は限られているとして，その限られた物理量に対して同じ期待値を与える密度行列は同一視してしまう方法である。たとえば，観測される系の物理量だけに限定してしまえば，(1)の密度行列も，波束の収縮の起る前の

$$\rho = \rho(\xi), \quad \zeta = \sum c_k (\xi_k \otimes \eta_k) \tag{5}$$

という状態と同一と見なせるわけである。

しかし，これは人為的に見えるので，U_t のような量子力学的な時間発展で波束の収束を起させたいということも納得できる。それが可能な連続な選択則は，どのような物理的意味をもつのであろうか。

そのようなことがらは，量子力学，古典力学などを包含するもっと広い枠（物理系の確率的記述とでもいう一般論）から眺めると，多少わかりやすいように思われる。それについては5)の附録にある程度の記述があるのでここでは省略するが，その結果を少し引用することにする。

ある系の力学量を作用素の集合$\mathcal{N}$で記述する場合，$\mathcal{N}$の作用素で，$\mathcal{N}$のすべての作用素と可換なものの全体は，$\mathcal{N}$の中心と呼ばれる。一般的な枠から考えると，$\mathcal{N}$の中心に属する作用素は，まさにその系の古典的力学量と考えることができる。ここに古典的力学量とは，すべての純粋状態（これを混合として表せないという意味のもので，ベクトルで表せる量子力学的状態

という意味ではないことに注意）で確定値をもつものである。

したがって，超選択則を観測機械の系に仮定するのは，それが巨視的であるが故に，古典的な力学量を持つと仮定することに他ならない。町田・並木の理論でも，そのような物理量が超選択則の具体例として使われている。

文　献

1) E.P. Wigner, Am. J. Phys. **31** (1963), 6.
2) A. Fine, Phys. Rev. **D2** (1970), 2783.
3) S. Machida & M. Namiki, Prog. Theor. Phys. **63** (1980), 1833.
4) G.C. Wick, E.P. Wigner, A.S. Wightman, Phys. Rev. **88** (1952), 101.
5) H. Araki, Prog. Theor. Phys. **64** (1980), 719.

交換関係の拡張

広大・理論研　　山　田　一　夫

[1] 量子力学における交換関係 $[q, p] = i$ に現われる p は，Diracにより直線上の無限小のずれの演算子と解釈されてきたが，これを一般化し無限小回転の演算子を含むような交換関係は作れないものであろうか。非相対論的な量子力学の具体的計算を見ればわかるとおり，スピンに関するものを別とすれば量子化の規則とは上の交換関係に他ならない。

その理由はおそらく物理的に問題にする系の振舞いが，その系を構成する微小部分のさまざまな並進運動の積重ねとして理解される場合が多いことによるものであろう。ここに言う並進運動とは無限小の場合であって，たとえ質点が曲線運動をするとしてもこれらの積重ねで表わされると考える。従って軌道角運動量も $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ のように直線上のずれの演算子を使って表わされる。

一方，高エネルギー物理学の対象となる様々な現象にはアイソスピンなどの内部自由度が重要な役割をはたしている。この場合には SU(2)又はこれに関連した非可換群が使われるが，通常の量子力学の場合とは異なり，無限小変換の演算子がある場合でも，内部空間における物理的意味の付けられるような「並進運動」には帰着されない。そこで，このような時にも量子化の規則を適用できるようにしたいために，最初に述べた問がでてくる。